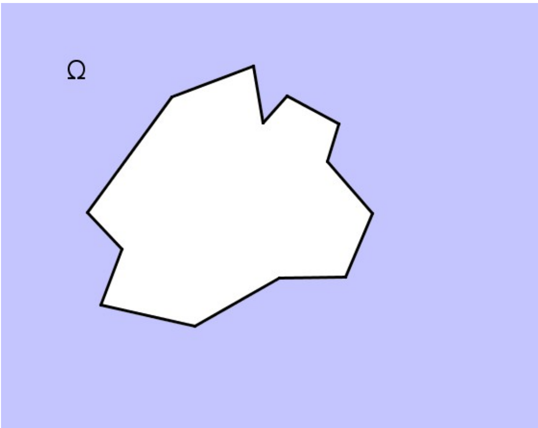
2. LE PROBLÈME PHYSIQUE

2.1 Applications conformes

2.1.1 Motivations

Comme présentée dans la partie 1.2.3, une grande part du problème consiste à déterminer la distribution du vent et de la température dans un domaine particulier : l'extérieur d'un polygone. Dans la suite, nous noterons ce domaine Ω .



La horde de manchots ayant une forme très aléatoire, on ne peut se satisfaire de résoudre le problème sur l'extérieur de polygones ayant une géométrie simple tel que le carré par exemple. Nous avons donc besoin d'une méthode plus générale qui permette de travailler avec n'importe quel polygone non-croisé, quelque soit son nombre de sommets.

L'idée est donc de résoudre le problème sur un domaine simple, pour lequel la solution est accessible analytiquement, pour ensuite la transférer sur notre domaine d'étude par le biais d'une transformation du plan.

Par exemple, nous verrons par la suite que nous sommes en mesure de donner la solution pour le vent autour d'un obstacle de type segment. L'enjeu serait alors de trouver une application qui transforme l'extérieur d'un segment en l'extérieur de notre polygone. Il faudra de plus être capable de déterminer la solution sur Ω , connaissant la solution sur le domaine de départ.

Nous allons voir que le problème pourra être résolu grâce aux applications conformes.

2.1.2 Définitions et propriétés

Nous avons choisi pour l'étude des transformations du plan d'utiliser l'analyse complexe.

Définition :
Soit U un ouvert de C
Une application $f : U \subset C \rightarrow C$ est dite conforme si elle conserve les angles.

Propriété :
La composition de deux applications conformes est elle-aussi une application conforme.

Nous avons également la propriété suivante d'après le livre *"Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann"* de Eric Toubiana et Ricardo Sá Earp (p45).

Propriété :
On a l' équivalence suivante :
f est conforme sur U *si et seulement si* f est holomorphe sur U et
$\forall z \in U , \ f'(z) \neq 0$

Le fait que la transformation utilisée soit holomorphe est lourd de conséquences car on peut alors utiliser les équations de Cauchy-Riemann.

En notant $f(z)=P(x,y)+iQ(x,y), \quad \forall z=x+iy \in U$, on a :

$$P_x(x,y)=Q_y(x,y) \quad \text{et} \quad P_y(x,y)=-Q_x(x,y)$$

et les fonctions P et Q sont des fonctions harmoniques (leur Laplacien est nul).

Ce sont en grande partie ces équations qui nous permettront de transférer une solution d'un domaine à un autre à l'aide d'une application conforme. (voir 2.2.3 et 2.3.2)

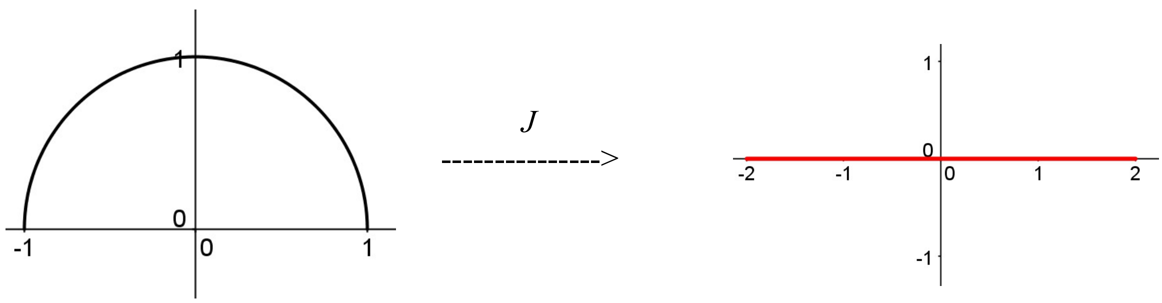
2.1.3 Transformation de Joukowski

Définition :
La transformation de Joukowski est définie par :

$$J(z)=z+\frac{1}{z} \quad , \quad \forall z \neq 0$$

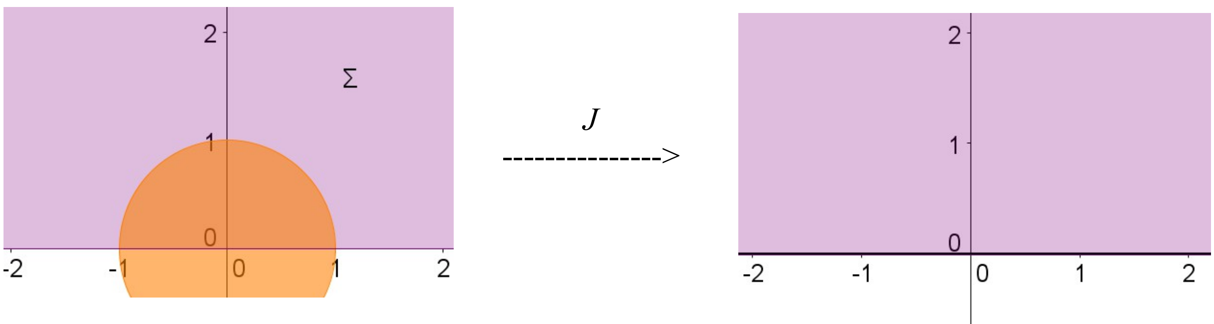
Cette application est holomorphe sur $C-\{0\}$ car :
$\forall z \neq 0 \quad , \quad J'(z)=1-\frac{1}{z^2}$
De plus, $\forall z \notin \{-1,0,1\}$, $J'(z) \neq 0$, donc cette transformation est une application conforme sur tous les domaines ouverts du plan complexe n'incluant ni 0 ni -1 ni 1 .

Propriété :
La transformation de Joukowski est une bijection qui transforme le demi-cercle unité supérieur en un segment borné aux points d'affixes respectives -2 et 2.



Preuve :
Soit z un point du demi-cercle unité supérieur. Alors, $\exists\theta\in[0,\pi]$, tel que $z=e^{i\theta}$.
Ainsi, $J(z)=e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos(\theta)$
Alors quand θ décrit $[0,\pi]$, $J(z)$ décrit $[-2,2]$ □

Propriété :
La transformation de Joukowski transforme la portion de plan Σ du schéma suivant en le demi-plan strictement supérieur.



La frontière du disque est exclue de Σ .

Preuve :
Notons que $\forall z=x+iy\neq 0$, on a $J(z)=\alpha(x,y)+i\beta(x,y)$
où :

$$\alpha(x,y)=\frac{x(x^2+y^2+1)}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \beta(x,y)=\frac{y(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2}$$

Si $M(z)\in\Sigma$, alors $x^2+y^2>1$ et $y>0$
Ainsi, on a bien $\beta(x,y)=\Im(J(z))>0$ □

<u>Conclusion :</u>
Nous avons démontré que l'application de Joukowski est une application conforme sur tous les domaines ouverts du plan complexe n'incluant ni 0 ni -1 ni 1 . De plus, les propriétés mises en évidence dans cette section serviront à déterminer la distribution du vent autour d'un disque, connaissant le vent autour d'un segment. (voir 2.2.5)

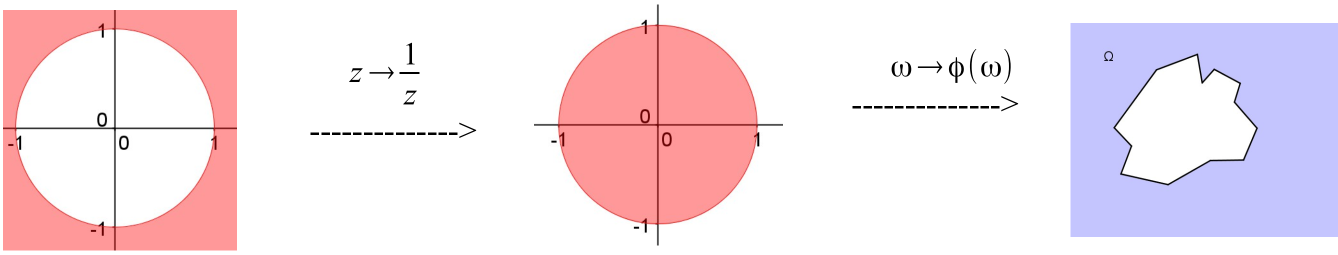
2.1.4 Transformation de Schwarz-Christoffel

Étant donné la conclusion de la section 2.1.3, il serait désormais intéressant de mettre en évidence une application renvoyant l'extérieur du disque unité sur l'extérieur de notre polygone. Le théorème suivant nous permettra d'en assurer l'existence.

Théorème : Théorème de l'application conforme de Riemann
Soit U un ouvert simplement connexe non vide du plan complexe, distinct du plan tout entier. Alors, il existe une bijection holomorphe (application conforme) entre U et le disque unité (frontière exclue).

Notre domaine d'étude Ω vérifie bien toutes les conditions du théorème de Riemann. On peut donc affirmer qu'il existe une application conforme ϕ entre l'intérieur du disque unité et Ω .

De plus, par l'inversion $z \rightarrow \frac{1}{z}$ qui est aussi une application conforme, l'intérieur du disque unité est renvoyé sur son extérieur (et inversement). Ainsi, l'application $z \rightarrow \phi(\frac{1}{z})$ est l'application recherchée.



Le théorème de Riemann nous a donc permis de prouver l'existence de l'application ϕ mais ne nous permet pas de déterminer cette dernière.

Définition :
Soit P un polygone dont les sommets ordonnés ont pour affixes les $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ et dont les angles intérieurs correspondants sont les $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$. On appelle ***application de Schwarz-Christoffel*** associée au polygone P une application de la forme suivante :

$$\forall z \in C, sc(z) = \omega_0 + K \int_0^z \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\omega}{z_k}\right)^{1-\frac{\beta_k}{\pi}} . d\omega \quad \text{où} \quad \omega_0 \quad \text{et} \quad K \quad \text{sont des constantes complexes.}$$

Propriété :
Une application de Schwarz-Christoffel définie comme ci-dessus est une application conforme qui envoie le disque unité sur l'extérieur du polygone P.

Cette transformation correspond donc parfaitement à l'application ϕ recherchée. Les constantes peuvent être choisies à l'aide de conditions supplémentaires du type $sc(z_0) = \omega_0$ ou encore $sc'(z_0) = \alpha_0$. Cette liberté dans le choix des constantes est intéressante car cela nous permet de conserver par exemple l'orientation d'une figure.

En pratique, nous utilisons un package permettant de générer cette application par la simple donnée des sommets du polygone P. Ce package est utilisable sous *Matlab* et a été créé par Tobin A. Driscoll de l'Université de Delaware (USA). Notons que ce package nous permet également d'obtenir la dérivée, ainsi que l'inverse de l'application.