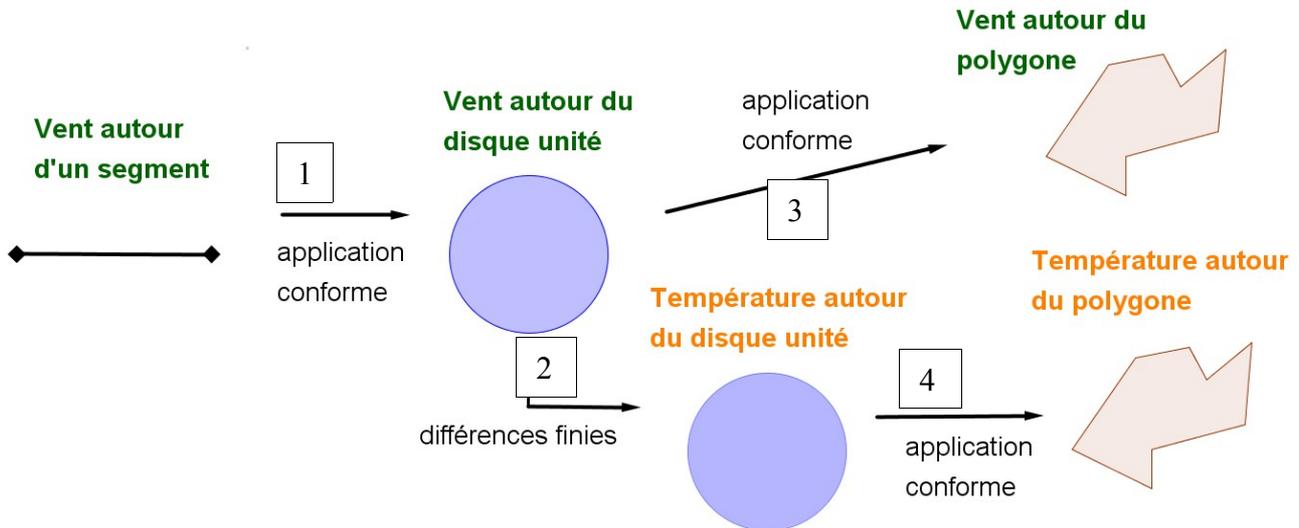


3. RÉOLUTION NUMÉRIQUE

Après avoir démontré dans les parties précédentes les méthodes utilisées, il est temps de passer à la résolution numérique du problème de détermination de la température et du vent sur le domaine extérieur de la horde de manchots. Afin d'illustrer les méthodes utilisées, nous proposons le diagramme suivant :



Parmi les quatre repères indiquant des problèmes à résoudre, trois correspondent à des situations déjà traitées dans les sections précédentes :

- repère 1 : Nous avons obtenu des formules explicites pour le vent autour du disque en 2.2.5.
- repère 3 et 4 : Le vent autour du polygone est obtenu à l'aide de la composition de deux applications conformes (fonction inverse et réciproque de l'application de Schwarz-Christoffel). On utilise alors le package de Tobin A. Driscoll. Voir paragraphes 2.2.6 et 2.3.4

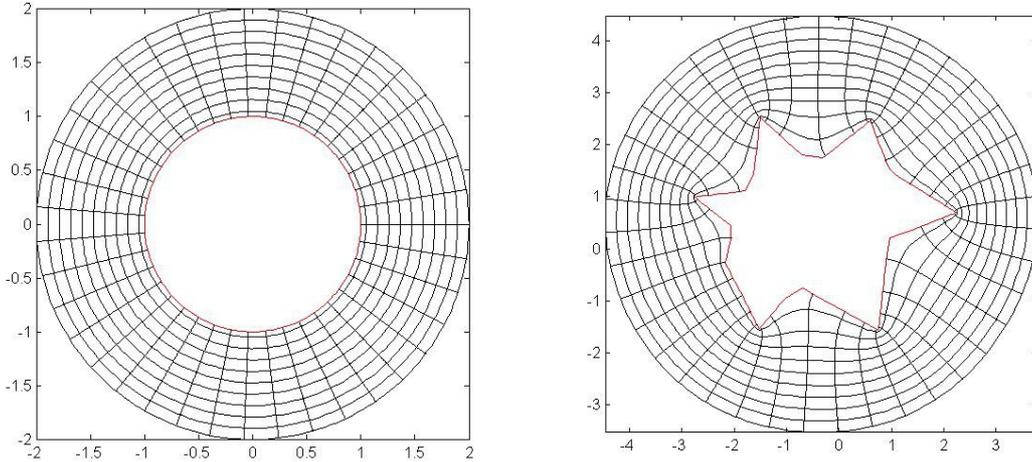
Il nous reste désormais à résoudre le problème d'obtention de la température autour du disque unité. Pour cela nous résolvons numériquement l'équation obtenue en 2.3.3 par une méthode de différences finies.

Remarque :

En analysant le diagramme ci-dessus, il est clair que nous aurions pu nous passer de la connaissance du vent autour du polygone pour déterminer la température autour du polygone. Seulement, il nous semble indispensable de le déterminer également afin de bien comprendre les phénomènes que l'on pourrait observer.

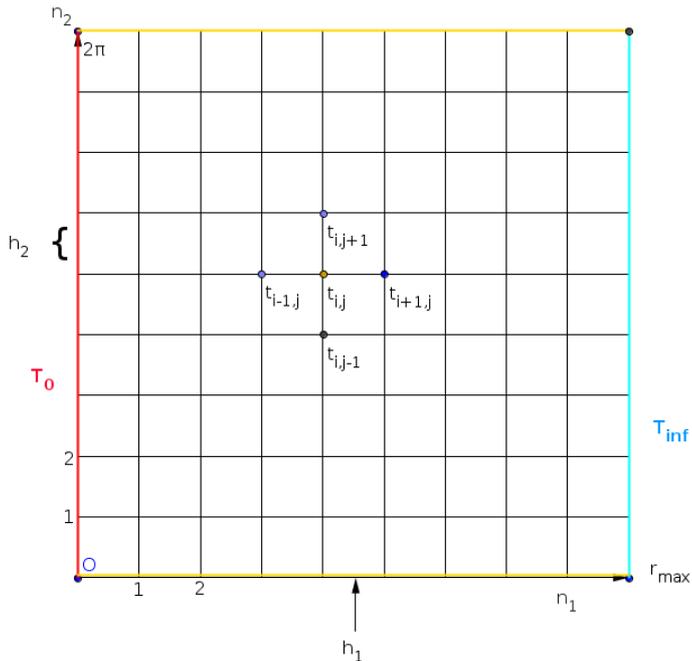
3.1 Maillage du domaine de résolution

Nous avons vu dans la partie 2.3.3 que le domaine de résolution $\tilde{\Omega}$ a la forme d'un anneau compris entre deux cercles centrés en l'origine et de rayons respectifs 1 et r_{max} . Le maillage qui s'impose donc naturellement est un maillage polaire. Toutefois, il est important de vérifier qu'après transformation par application conforme, les points où l'on connaîtra la solution sur le domaine final soient bien répartis. Examinons alors la figure suivante représentant le maillage autour du disque et sa transformation autour d'un polygone.



Nous remarquons que les nœuds du maillage d'arrivée sont répartis de manière similaire aux nœuds du maillage de départ, sauf pour les points situés dans les concavités du domaine Ω . En effet, à ces endroits les nœuds sont clairement plus éloignés de la frontière qu'ils ne l'étaient avant transformation. Pour remédier à cela, nous prendrons soin de choisir un pas radial très fin afin d'assurer que l'on atteigne même les zones proches de la frontière du domaine Ω .

Sur la figure ci-dessous, nous présentons les notations utilisées dans la suite. Notons que nous avons choisi de représenter le maillage sous forme rectangulaire par soucis de clarté mais cela ne modifie pas le raisonnement pour autant.



Sur ce schéma, $t_{i,j}$ désigne l'approximation de la température au point (r_i, θ_j) vérifiant :

$$r_i = h_1 \cdot i \quad \text{avec} \quad h_1 = \frac{r_{max} - 1}{n_1 + 1}$$

$$\theta_j = h_2 \cdot j \quad \text{avec} \quad \theta_j = \frac{2\pi}{n_2}$$

Notons que T_0 désigne la température au sein de la horde et T_{inf} la température au large de la horde. Nous rappelons que $T_0 = 1$ et $T_{inf} = 0$.

On a alors les conditions au bord de type Dirichlet suivantes :

$$\rightarrow t_{0,j} = T_{inf} \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, n_2\} \quad (\text{ligne rouge})$$

$$\rightarrow t_{n_1+1,j} = T_0 \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, n_2\} \quad (\text{ligne bleue})$$

Nous avons également la condition périodique suivante :

$$t_{i,0} = t_{i,n_2} \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n_1+1\} \quad (\text{lignes jaunes})$$

3.2 Schéma numérique utilisé pour la température

On rappelle l'équation de la température trouvée auparavant :

$$\tau_\theta \cdot \left(-\sin \theta \cdot \left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\right) + \tau_r \cdot \left(\cos \theta \cdot \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{Pe \cdot r}\right) - \frac{1}{Pe} \cdot \tau_{rr} - \frac{1}{Pe \cdot r^2} \cdot \tau_{\theta\theta} = 0 \quad (\#\#)$$

On pose alors :

$$a_{i,j} = \cos \theta_j \cdot \left(1 - \frac{1}{r_i^2}\right) - \frac{1}{Pe \cdot r_i}, \quad b_{i,j} = -\frac{\sin \theta_j}{r_i} \cdot \left(1 + \frac{1}{r_i^2}\right), \quad c = -\frac{1}{Pe} \quad \text{et} \quad d_i = -\frac{1}{Pe \cdot r_i^2}$$

Le schéma d'approximation par différences finies utilisé ici sera le schéma centré suivant :

$$a_{i,j} \cdot \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_1} + b_{i,j} \cdot \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_2} + c \cdot \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_1^2} + d_i \cdot \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h_2^2} = 0$$

$$\forall 1 \leq i \leq n_1, \quad \forall 1 \leq j \leq n_2 \quad \text{en affectant à la notation } u_{i,n_2+1} \text{ le terme } u_{i,1}$$

Ce schéma numérique peut encore s'écrire sous la forme :

$$\eta_{i,j} \cdot u_{i+1,j} + \alpha_{i,j} \cdot u_{i-1,j} + \gamma_{i,j} \cdot u_{i,j} + \beta_{i,j} \cdot u_{i,j-1} + \mu_{i,j} \cdot u_{i,j+1} = 0$$

en introduisant les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma_{i,j} &= -\frac{2c}{h_1^2} - \frac{2d_i}{h_2^2}, & \beta_{i,j} &= \left(-\frac{b_{ij}}{2h_2} + \frac{d_i}{h_2^2}\right), & \alpha_{i,j} &= \left(-\frac{a_{ij}}{2h_1} + \frac{c}{h_1^2}\right), \\ \mu_{i,j} &= \left(\frac{b_{ij}}{2h_2} + \frac{d_i}{h_2^2}\right), & \eta_{i,j} &= \left(\frac{a_{ij}}{2h_1} + \frac{c}{h_1^2}\right) \end{aligned}$$

Il s'agira alors de résoudre le système matriciel $A \cdot U = B$ avec $A \in R^{n_1 \cdot n_2 \times n_1 \cdot n_2}$ et $U, B \in R^{n_1 \cdot n_2}$ définis par : (Pour $n_1=3$ et $n_2=3$)

$$A = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \mu_{11} & \beta_{11} & \eta_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{12} & \gamma_{12} & \mu_{12} & 0 & \eta_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{13} & \beta_{13} & \gamma_{13} & 0 & 0 & \eta_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & 0 & \gamma_{21} & \mu_{21} & \beta_{21} & \eta_{21} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \beta_{22} & \gamma_{22} & \mu_{22} & 0 & \eta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \mu_{23} & \beta_{23} & \gamma_{23} & 0 & 0 & \eta_{23} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{31} & 0 & 0 & \gamma_{31} & \mu_{31} & \beta_{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{32} & 0 & \beta_{32} & \gamma_{32} & \mu_{32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} & \mu_{33} & \beta_{33} & \gamma_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\alpha_{11} \\ -\alpha_{12} \\ -\alpha_{13} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\eta_{31} \\ -\eta_{32} \\ -\eta_{33} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ \dots \\ u_{1,n_2} \\ u_{2,1} \\ \dots \\ u_{2,n_2} \\ \dots \\ u_{n_1,n_2} \end{pmatrix}$$

3.3 Consistance du schéma numérique

Nous allons maintenant nous intéresser à la consistance de notre schéma numérique. Pour cela, nous calculons l'erreur de troncature.

On utilise les développements limités suivants :

$$1) \quad u(r_i \pm h_1, \theta_j) = u(r_i, \theta_j) \pm h_1 \cdot u_r(r_i, \theta_j) + \frac{h_1^2}{2} \cdot u_{rr}(r_i, \theta_j) \pm \frac{h_1^3}{6} \cdot u_{rrr}(r_i, \theta_j) + O(h_1^4)$$

$$2) \quad u(r_i, \theta_j \pm h_2) = u(r_i, \theta_j) \pm h_2 \cdot u_\theta(r_i, \theta_j) + \frac{h_2^2}{2} \cdot u_{\theta\theta}(r_i, \theta_j) \pm \frac{h_2^3}{6} \cdot u_{\theta\theta\theta}(r_i, \theta_j) + O(h_2^4)$$

$$\text{On a alors : } *_{1} : \quad a_{ij} \cdot \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h_1} = a_{ij} \cdot \left[u_r(r_i, \theta_j) + \frac{h_1^2}{3} u_{rrr}(r_i, \theta_j) + O(h_1^3) \right]$$

$$\text{puis } *_{2} : \quad b_{ij} \cdot \frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2h_2} = b_{ij} \cdot \left[u_\theta(r_i, \theta_j) + \frac{h_2^2}{3} u_{\theta\theta\theta}(r_i, \theta_j) + O(h_2^3) \right]$$

$$\text{et } *_{3} : \quad c \cdot \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h_1^2} = c \cdot \left[u_{rr}(r_i, \theta_j) + \frac{h_1}{3} u_{rrr}(r_i, \theta_j) + O(h_1^2) \right]$$

$$\text{et finalement } *_{4} : \quad d_i \cdot \frac{u_i^{j-1} - 2u_i^j + u_i^{j+1}}{h_2^2} = d_i \cdot \left[u_{\theta\theta}(r_i, \theta_j) + \frac{h_2}{3} u_{\theta\theta\theta}(r_i, \theta_j) + O(h_2^2) \right]$$

Alors on obtient par addition et en utilisant l'équation (##) :

$$\begin{aligned} *_{1} + *_{2} + *_{3} + *_{4} &= 0 + a_{ij} \cdot \left[\frac{h_1^2}{3} u_{rrr}(r_i, \theta_j) + O(h_1^3) \right] + b_{ij} \cdot \left[\frac{h_2^2}{3} u_{\theta\theta\theta}(r_i, \theta_j) + O(h_2^3) \right] \\ &\quad + c \cdot \left[\frac{h_1}{3} u_{rrr}(r_i, \theta_j) + O(h_1^2) \right] + d_i \cdot \left[\frac{h_2}{3} u_{\theta\theta\theta}(r_i, \theta_j) + O(h_2^2) \right] \\ &= \epsilon_{i,j} \end{aligned}$$

Alors :

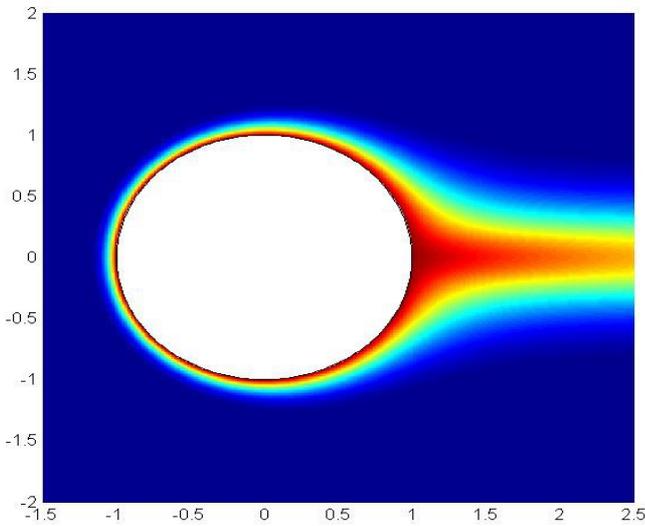
$$\|\epsilon_{i,j}\|_{\infty} \leq \left(\frac{h_1^2}{3} \cdot a_{ij} + \frac{h_1}{3} \cdot c \right) \cdot \|u_{rrr}(r, \cdot)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} + \left(\frac{h_2^2}{3} \cdot b_{ij} + \frac{h_2}{3} \cdot d_i \right) \cdot \|u_{\theta\theta\theta}(\cdot, \theta)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} + O(h_1^2) + O(h_2^2)$$

Ainsi, $\|\epsilon_{i,j}\|_{\infty} \rightarrow 0$ quand $h_1 \rightarrow 0$ et $h_2 \rightarrow 0$.

On peut alors affirmer que l'on a un ordre de consistance de 2 en rayon, et de 2 en angle.

3.4 Résultats

Nous avons implémenté cette méthode sous Matlab dans la fonction tempdisk. Voici la représentation graphique obtenue pour la solution numérique :



Résultat obtenu pour :

$$r_{max}=3, \quad n_1=150, \quad n_2=300, \quad Pe=100$$

Nous rappelons que le vent vient de la gauche de la figure, il est donc logique que les zones les plus chaudes soient situées sur la partie droite.

En récupérant les résultats de la fonction tempdisk avec différents jeux de paramètres, nous avons vérifié que les températures étaient toujours comprises entre 0 et 1. Ainsi, le schéma numérique utilisé semble générer un principe du maximum discret. Ce résultat qui était prévisible sera réutilisé dans la définition d'un critère d'évaluation de perte de chaleur pour les manchots.