

2.3 Détermination de la température

Le but de cette partie est de mettre en place une méthode permettant d'obtenir la température en tout point du domaine Ω . Pour cela, nous réutiliserons la théorie des applications conformes déjà utilisées dans le cas du vent.

2.3.1 Équation de convection-diffusion

Nous allons utiliser dans cette partie l'équation de convection-diffusion qui relie le vent et la température :

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = D \cdot \Delta \tau - \nabla_{x,y} \tau \cdot \vec{u} + R$$

avec les notations suivantes :

τ : Température $\vec{u}$: Vent t : variable temporelle x, y : variables spatiales
 R : Source de chaleur D : Coefficient de diffusion thermique

D'après les hypothèses du modèle, il n'y a pas de source de chaleur dans le domaine Ω .
Ainsi, $R=0$.

De plus, à chaque étape de résolution, le système est à l'équilibre et donc ne dépend pas du temps.
Ainsi, l'équation devient :

$$\nabla_{x,y} \tau \cdot \vec{u} = D \cdot \Delta \tau$$

Pour simplifier l'étude, nous normalisons l'équation de la façon suivante, en notant :

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u}}{U}, \quad T = \frac{\tau - \tau_\infty}{\tau_H - \tau_\infty} \quad \text{où } \tau_H \text{ est la température au sein de la horde.}$$

τ_∞ est la température aux points éloignés de la horde

De cette façon, la variable T est un nombre sans unité compris entre 0 et 1.
Il vaudra 1 sur la frontière de la horde et 0 pour les points éloignés de la horde.

On introduit également : $x' = \frac{x}{L}$ et $y' = \frac{y}{L}$ où L désigne le diamètre de la horde dans le cas où elle aurait une forme circulaire (L dépend alors du nombre de manchots).

On introduit également la constante $Pe = \frac{U \cdot L}{D}$ nommée nombre de Péclet.

On remarque que si l'on souhaite modifier l'intensité du vent, il suffit de modifier cette dernière constante.

L'équation devient alors $Pe \cdot \nabla_{x,y} T \cdot \vec{u} = \Delta T$ où toutes les quantités sont sans unité.
Étant données les hypothèses énoncées quant à la température constante au sein de la horde, on ajoute à cette équation la condition au bord de type Dirichlet suivante :

$$T(x, y) = 1, \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega$$

Remarque :

Nous aurons besoin par la suite d'utiliser l'autre hypothèse émise pour la température disant qu'au loin de la horde, la température est également constante. Dans ce cas on aura la condition $T=0$.

Le système qui caractérise la température pour notre problème est donc :

$$\begin{cases} Pe \cdot \nabla_{x,y} T \cdot \vec{u} = \Delta T & \text{sur } \Omega \\ T(x, y) = 1, & \forall (x, y) \in \partial \Omega \\ \lim_{x,y \rightarrow +\infty} T(x, y) = 0 \end{cases} \quad (**)$$

Méthode de résolution du problème pour la température :

Étant donné que nous disposons de formules explicites pour le vent sur le domaine Ω_2 correspondant à l'extérieur du cercle, nous allons chercher à résoudre la première équation du système (**) par une méthode de différences finies. Ensuite, nous déterminerons la température sur le domaine final Ω à l'aide de la transformation conforme qui envoie Ω_2 sur Ω .

2.3.2 Passage de la solution d'un domaine à un autre

On suppose connue une solution de (**) sur un domaine Ω_1 notée T_1 . On cherche à démontrer que si f est une application conforme qui envoie Ω_1 sur un autre domaine Ω_2 , alors $T_2 = T_1 \circ f^{-1}$ est solution de (**) sur Ω_2 .

Comme nous l'avons déjà démontré pour le vent dans la section 2.2.3, on réutilise la formule qui relie les Laplaciens et les gradients des deux fonctions T_1 et T_2 :

$$\nabla(T_1) = \nabla T_2(f) \cdot Jac(f) \quad \text{et} \quad \Delta(T_1) = \Delta T_2(f) \cdot det(Jac(f))$$

$$\text{Alors :} \quad \Delta T_2(f) = \frac{Pe}{det(Jac(f))} \cdot \nabla T_1 \cdot \vec{u}_1 \quad \text{car } T_1 \text{ solution de (**)}$$

$$\Delta T_2(f) = \frac{Pe}{det(Jac(f))} \cdot \nabla T_2 \cdot Jac(f) \cdot \vec{u}_1$$

On rappelle que $\vec{u}_1 = \nabla \psi_1$ et que $\vec{u}_1 = \nabla \psi_1$ avec $\psi_2 = \psi_1 \circ f^{-1}$

$$\text{Alors, on a également la relation :} \quad \vec{u}_1 = {}^t \nabla(\psi_1) = (\nabla \psi_2(f) \cdot Jac(f))^T = (Jac(f))^T \cdot \vec{u}_2$$

$$\text{Ainsi :} \quad \Delta T_2(f) = \frac{Pe}{det(Jac(f))} \cdot \nabla T_2 \cdot Jac(f) \cdot (Jac(f))^T \vec{u}_2$$

$$\text{Or, par les équations de Cauchy-Riemann, on a } Jac(f) \cdot (Jac(f))^T = det(Jac(f)) \cdot I$$

En effet, $Jac(f)$ est de la forme $\begin{pmatrix} g_x & g_y \\ -g_y & g_x \end{pmatrix}$ et donc on a :

$$Jac(f) \cdot (Jac(f))^T = \begin{pmatrix} g_x^2 + g_y^2 & 0 \\ 0 & g_x^2 + g_y^2 \end{pmatrix} = det(Jac(f)) \cdot I$$

On obtient donc finalement : $\Delta T_2(f) = Pe \cdot \nabla T_2 \cdot \vec{u}_2$

Ainsi, $T_2 = T_1 \circ f^{-1}$ est solution de la première équation du système (**) sur Ω_2 .

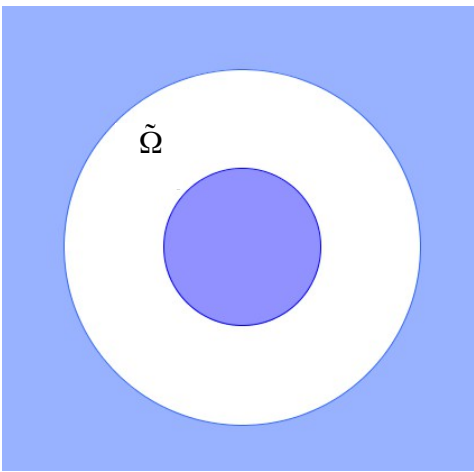
Remarque :

1. On remarque dans cette démonstration, comme dans la démonstration du 2.2.3, que ce qui nous permet d'obtenir une solution sur le nouveau domaine est l'utilisation des équations de Cauchy-Riemann. On constate alors tout l'intérêt des applications holomorphes.

2. Afin de vérifier que le système (**) tout entier est bien vérifié pour T_2 , il faudra s'assurer que les deux autres conditions sont toujours valables. Autrement dit, il faut avoir $f(\partial\Omega_1)=\partial(\Omega_2)$ et $\forall X$, tel que $\|X\|=+\infty$, $\|f(X)\|=+\infty$. Or nous verrons que ces conditions sont bien vérifiées pour l'application conforme que l'on va utiliser.

2.3.3 Température autour du disque unité

Pour résoudre l'équation aux dérivées partielles de (**) autour du disque unité, nous nous plaçons sur le domaine $\tilde{\Omega}$ décrit sur la figure suivante :



$\tilde{\Omega}$ est le domaine situé entre le cercle unité et un deuxième cercle de même centre et de rayon $r_{max} > 1$. Il est raisonnable de se limiter à ce domaine car la température dans les zones éloignées de la horde est constante et connue.

Sur ce domaine, il est naturel d'utiliser les coordonnées polaires, en notant :

$$x = r \cdot \cos(\theta) \quad \text{et} \quad y = r \cdot \sin(\theta) \\ \text{où } (r, \theta) \in [1, r_{max}] \times [0, 2\pi]$$

Pour pouvoir utiliser l'équation (**), nous avons besoin de la traduire en coordonnées polaires.

Tout d'abord, nous connaissons le vent $\vec{u}_2$ d'après la partie 2.2.5 :

$$\forall (x, y) \in \tilde{\Omega}, \quad \vec{u}_2(x, y) = \left(1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right)^T$$

Ce qui donne pour la version polaire $\vec{\mu}_2$:

$$\vec{\mu}_2(r, \theta) = \left(\frac{r^2 + \sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{r^2}, \frac{-2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} \right)^T \quad (2.0)$$

On note $\tilde{T}$ et τ la température sur $\tilde{\Omega}$ respectivement en coordonnées cartésiennes et polaires.

Alors : $\tau(r, \theta) = \tilde{T}(r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta))$ et en dérivant, on obtient :

$$(1) \quad \frac{\partial \tau}{\partial r}(r, \theta) = \cos(\theta) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \quad \text{et} \quad (2) \quad \frac{\partial \tau}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \cdot \sin(\theta) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + r \cdot \cos(\theta) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y}$$

Cherchons tout d'abord à exprimer les dérivées partielles de $\tilde{T}$ en fonction de celle de τ .

Par $(1) \times r \sin(\theta) + (2) \times \cos(\theta)$, on obtient :

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} = \frac{\cos(\theta) \frac{\partial \tau}{\partial \theta}}{r} + \sin(\theta) \frac{\partial \tau}{\partial r} \quad (2.1)$$

Puis par $(1) \times r \cos(\theta) - (2) \times \sin(\theta)$:

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} = -\frac{\sin(\theta) \frac{\partial \tau}{\partial \theta}}{r} + \cos(\theta) \frac{\partial \tau}{\partial r} \quad (2.2)$$

On a alors $(\nabla T)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \\ \frac{\partial T}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin(\theta) \frac{\partial \tau}{\partial \theta}}{r} + \cos(\theta) \frac{\partial \tau}{\partial r} \\ \frac{\cos(\theta) \frac{\partial \tau}{\partial \theta}}{r} + \sin(\theta) \frac{\partial \tau}{\partial r} \end{pmatrix}$

On peut alors transposer dans la formule précédente, on écrira les calculs avec l'opérateur de dérivée pour alléger la notation.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin(\theta) \frac{\partial \tau}{\partial \theta}}{r} + \cos(\theta) \frac{\partial \tau}{\partial r} \\ \frac{\cos(\theta) \frac{\partial \tau}{\partial \theta}}{r} + \sin(\theta) \frac{\partial \tau}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} \\ \sin \theta & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

Par produit :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} \\ \sin \theta & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et on a donc :

$$D = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

On applique alors l'opérateur à τ et on obtient le Laplacien de la température en coordonnées polaires :

$$\Delta \tilde{T}(r.\cos(\theta), r.\sin(\theta)) = \frac{\partial \tau}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \tau}{\partial \theta^2}(r, \theta) \quad (2.3)$$

Ensuite, on injecte les relations (2.0), (2.1), (2.2) et (2.3) dans (**),
On obtient alors après simplification:

$$\tau_{\theta} \cdot \left(-\sin \theta \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^3}\right)\right) + \tau_r \cdot \left(\cos \theta \cdot \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{Pe \cdot r}\right) - \frac{1}{Pe} \cdot \tau_{rr} - \frac{1}{Pe \cdot r^2} \cdot \tau_{\theta\theta} = 0$$

L' équation est couplée avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \tau(1, \theta) = 1, \quad \tau(r_{max}, \theta) = 0 & \forall \theta \in [0, 2\pi] \\ \tau(r, 2\pi) = \tau(r, 0) & \forall r \in [1, r_{max}] \end{cases}$$

Cette équation sera résolue numériquement par une méthode de différences finies. (voir section 3.2)

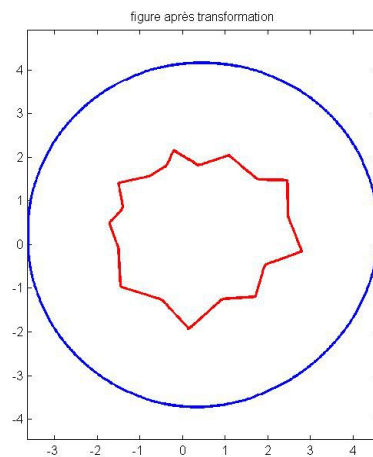
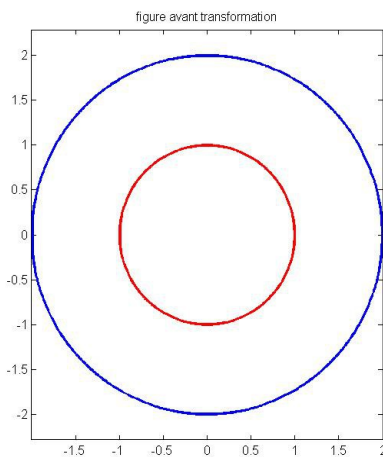
2.3.4 Température autour d'un polygone

On note T la température sur le domaine final Ω , et $\tilde{T}$ la température autour du disque unité (domaine Ω_2). D'après 2.3.2 et 2.1.4,

$$T_2 = T_1 \circ f^{-1} \quad \text{avec} \quad \forall z \in \Omega_2, \quad f(z) = sc^{-1}\left(\frac{1}{z}\right)$$

Ainsi, on a : $\forall \omega \in \Omega, \quad T(\omega) = \tilde{T}\left(\frac{1}{sc(\omega)}\right) = \tilde{T}(z) \quad \text{si} \quad f(z) = \omega$.

Étant donné la forme du domaine sur lequel est connue $\tilde{T}$, nous nous intéressons à l'image de ce dernier afin de vérifier qu'il est suffisant pour la résolution du problème.



Ci-contre, nous pouvons voir l'image du domaine de résolution par l'application f pour un polygone quelconque. On peut remarquer que la transformation a conservé la forme du cercle extérieur mais aussi les proportions de départ. Le domaine choisi en forme d'anneau convient donc parfaitement à la résolution autour du disque.