

2.2 Détermination du vent autour d'un obstacle

Nous étudions le cas où le vent s'écoule suivant un flux constant en l'absence d'obstacle. Nous cherchons à déterminer la distribution du vent sur le domaine Ω présenté précédemment. Pour cela, nous allons l'assimiler à une fonction u_Ω qui à tout point de Ω associe un élément de R^2 . Le vent est supposé assez régulier pour que la fonction u_Ω soit de classe C^1 sur Ω .

2.2.1 Théorème de Helmholtz-Hodge

L'idée de départ est de vouloir écrire le vent comme une fonction qui dérive d'un potentiel scalaire. Nous verrons dans la partie 2.2.3 que c'est ce qui nous permettra de faire passer la solution pour le vent d'un domaine à un autre.

Une première approche est d'utiliser la décomposition suivante :

Théorème : Décomposition de Helmholtz-Hodge

Soit Ω un domaine compact et connexe du plan, de frontière régulière ou régulière par morceaux.

Soit \vec{u} un champ de vecteurs de classe C^1 . $\vec{u} : \Omega \rightarrow R^2$

Alors : $\begin{cases} \exists \vec{A} : \Omega \rightarrow R^2 \\ \exists \psi : \Omega \rightarrow R \end{cases}$ tels que $\vec{u} = \text{grad}(\psi)^T + \text{rot}(\vec{A})$

Désormais, nous pouvons écrire le vent comme : $\vec{u}_\Omega = \text{grad}(\psi)^T + \text{rot}(\vec{A})$. En effet, toutes les hypothèses du théorème sont vérifiées, quitte à borner le domaine Ω . La connaissance de la température et du vent sont en effet inutiles pour le problème lorsqu'on est très éloigné de la horde.

En analysant la décomposition, on constate que le vent s'interprète alors comme la somme du gradient d'un potentiel scalaire et du rotationnel d'un champ de vecteurs. Sur le plan physique, on sait que le rotationnel induit des phénomènes de rotations.

Or, pour notre modèle, nous négligeons les phénomènes de tourbillonnement pour le vent. Dans notre cas on pourra alors écrire :

$$\vec{u}_\Omega = \text{grad}(\psi)^T$$

Dans la suite des travaux, nous nous attacherons à déterminer le potentiel ψ sur Ω pour ensuite en déduire le vent.

2.2.2 Équation du vent

Tout d'abord, utilisons l'hypothèse posée dans le modèle selon laquelle le vent ne pénètre pas dans la horde. Cela se traduit par le fait que le flux à travers la frontière de la horde est nul. Ainsi, on a : $\vec{u}_\Omega \cdot \vec{n} = 0$ sur $\partial\Omega$.

On obtient donc la condition au bord suivante :

$$\text{grad}(\psi) \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

S'appuyant sur le fait que le vent est un phénomène de transport, on peut affirmer qu'il n'y a pas de source pour cette quantité. Alors pour tout domaine borné D , le flux à travers le bord de D est nul. Ainsi, on a :

$$\int_{\partial D} \langle \vec{u}_\Omega \cdot \vec{n} \rangle \cdot d\sigma = 0 \quad \text{où } \vec{n} \text{ désigne la normale unitaire en un point du bord.}$$

Nous utilisons à présent le théorème suivant :

Théorème : Théorème de Gauss

Soit D un domaine ouvert et borné du plan.

Soit \vec{u} un champ de vecteurs de classe C^1 sur D .

Alors :

$$\int \int_D \operatorname{div} (\vec{u}) \cdot dx \cdot dy = \int_{\partial D} \langle \vec{u}_\Omega \cdot \vec{n} \rangle \cdot d\sigma$$

Ainsi, grâce à ce théorème, combiné à la remarque précédente, on obtient :

$$\int \int_D \operatorname{div} (\vec{u}_\Omega) \cdot dx \cdot dy = 0, \quad \forall D \text{ domaine ouvert borné inclus dans } \Omega.$$

Puisque l'intégrale doit s'annuler sur tout domaine $D \subset \Omega$, il faut forcément que :

$$\operatorname{div} (\vec{u}_\Omega)(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

Enfin, on a vu en 2.2.1 que le vent s'écrit $\vec{u}_\Omega = \operatorname{grad}(\psi)^T$. Alors, on obtient :

$$\operatorname{div} (\operatorname{grad}(\psi)) (x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad \text{et donc :}$$

$$\boxed{\Delta(\psi) = 0} \quad \text{sur } \Omega.$$

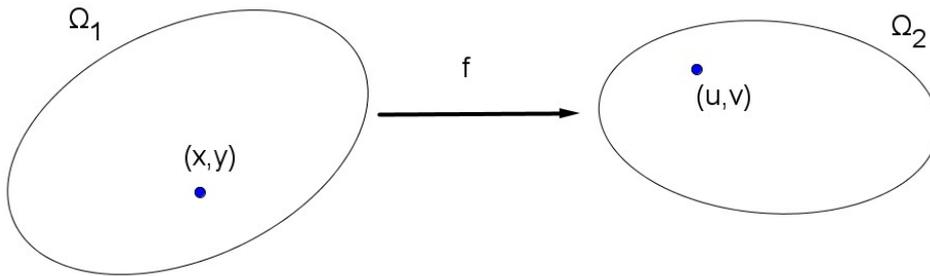
Pour déterminer le vent, il s'agira donc de chercher le potentiel ψ associé au vent en résolvant le problème de Poisson homogène suivant :

$$\boxed{\begin{cases} \Delta(\psi) = 0 & \text{sur } \Omega \\ \operatorname{grad}(\psi) \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}} \quad (*)$$

2.2.3 Passage de la solution d'un domaine à un autre

Dans cette section, on suppose que l'on connaît une solution du système (*) sur un certain domaine Ω_1 . Alors, on souhaite déterminer une solution du même système sur un domaine Ω_2 qui est l'image de Ω_1 par une application conforme f .

Nous utiliserons les notations présentes sur le schéma suivant :



Notons ψ_1 une solution du système (*) sur Ω_1 et considérons $\psi_2 = \psi_1 \circ f^{-1}$

Nous allons montrer que ψ_2 vérifie le système (*).

On a $\psi_1(x, y) = \psi_2 \circ f(x, y)$. Nous cherchons dans un premier temps à établir une relation entre $\Delta(\psi_1)$ et $\Delta(\psi_2)$.

Tout d'abord : $\nabla \psi_1(x, y) = \nabla \psi_2(f(x, y)) \cdot \text{Jac}(f)(x, y)$ où $\text{Jac}(f)$ désigne la matrice jacobienne de f .

On notera : $f(x, y) = (g(x, y), h(x, y))$

En développant la relation matricielle, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(f(x, y)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \psi_2}{\partial y}(f(x, y)) \cdot \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) & (1) \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(f(x, y)) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial \psi_2}{\partial y}(f(x, y)) \cdot \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) & (2) \end{cases}$$

On dérive (1) par rapport à x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2}(x, y) = & \left[\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2}(f(x, y)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y}(f(x, y)) \cdot \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) \right] \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + \\ & \left[\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y}(f(x, y)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2}(f(x, y)) \cdot \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) \right] \cdot \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) + \\ & \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(f(x, y)) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial \psi_1}{\partial y}(f(x, y)) \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2}(f) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y}(f) + \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(f) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2}(f) \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \psi_2}{\partial y}(f) \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

De même, en dérivant (2) par rapport à y :

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2}(f) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y}(f) + \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(f) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2}(f) \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \psi_2}{\partial y}(f) \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$$

Puis en additionnant ces deux lignes, on obtient :

$$\Delta(\psi_1) = \frac{\partial \psi_2^2}{\partial x^2}(f) \cdot (g_x^2 + g_y^2) + \frac{\partial \psi_2^2}{\partial y^2}(f) \cdot (h_x^2 + h_y^2) + \Delta g \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(f) + \Delta h \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial y}(f)$$

Puisque f est une application conforme, on peut utiliser les équations de Cauchy-Riemann énoncées en 2.1.2. Alors :

$$g_x = h_y \quad h_x = -g_y \quad \text{et donc} \quad h_x^2 + h_y^2 = g_x^2 + g_y^2$$

De plus, g et h sont harmoniques. On obtient donc :

$$\Delta(\psi_1) = \Delta \psi_2(f) \cdot (g_x^2 + g_y^2)$$

D'autre part, on remarque que, toujours grâce aux équations de Cauchy Riemann, la jacobienne de f est de la forme :

$$Jac(f) = \begin{pmatrix} g_x & g_y \\ -g_y & g_x \end{pmatrix}$$

Alors, on obtient la relation : $\Delta(\psi_1) = \Delta \psi_2(f) \cdot \det(Jac(f))$

Enfin, notons que l'application f étant conforme, le déterminant de sa jacobienne ne s'annule jamais.

Ainsi, si $\Delta(\psi_1) = 0$ sur Ω_1 , alors $\Delta(\psi_2) = 0$ sur $\Omega_2 = f(\Omega_1)$

Comme ψ_1 est une solution du système (*) sur Ω_1 , si \vec{n}_1 désigne la normale unitaire au bord $\partial\Omega_1$, on a :

$$grad(\psi_1) \cdot \vec{n}_1 = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_1 \quad \text{et alors les vecteurs} \quad grad(\psi_1)^T \quad \text{et} \quad \vec{n}_1 \quad \text{sont orthogonaux.}$$

De plus, nous rappelons que l'application f est conforme donc elle conserve les angles. Ainsi, les vecteurs $grad(\psi_2)^T$ et \vec{n}_2 sont également orthogonaux. On a donc :

$$grad(\psi_2) \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_2$$

Les deux conditions du système (*) sont bien vérifiées. Alors, nous pouvons transformer une solution ψ_1 de (*) sur Ω_1 en une solution ψ_2 de (*) sur Ω_2 par la formule :

$$\psi_2 = \psi_1 \circ f^{-1}$$

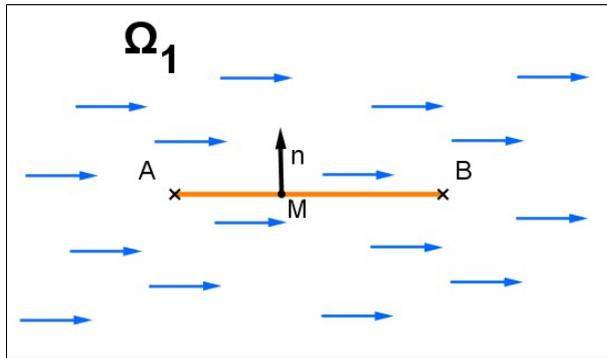
2.2.4 Vent autour d'un segment

Nous cherchons dans un premier temps à trouver le vent dans une configuration très simple :

→ Le vent, en l'absence d'obstacle, est constant et suit la direction (O,x) dans le sens positif.

→ On considère un obstacle d'épaisseur nulle, représenté par le segment $[(-2,0) ; (2,0)]$.

Voici une représentation de la situation :



On remarque qu'en tout point M du segment où la normale existe, la normale est toujours égale au vecteur :
 $\vec{n} = (0, 1)$

L'obstacle ayant une épaisseur nulle, il ne génère aucune résistance au vent. Le champ de vecteurs est donc constant partout sur Ω_1 . Si l'on note U la vitesse constante du vent, on obtient l'expression du vent : $\forall (x, y) \in \Omega_1, \vec{u}_1(x, y) = (U, 0)$.

Vérifions que l'on peut trouver un potentiel scalaire générant \vec{u}_1 qui vérifie le système (*) sur Ω_1 . Étant donné l'expression de \vec{u}_1 , il est naturel de s'intéresser au potentiel suivant :

$$\forall (x, y) \in \Omega_1, \psi_1(x, y) = U \cdot x$$

On a bien $\vec{u}_1 = \text{grad}(\psi_1)^T$.

Les vecteurs \vec{u}_1 et \vec{n} sont orthogonaux donc la première équation de (*) est bien vérifiée. De plus, le gradient de ψ_1 étant constant, on a bien un laplacien nul sur Ω_1 .

Ainsi, le potentiel scalaire ψ_1 est solution de (*) sur Ω_1 .

2.2.5 Vent autour du disque unité

Nous disposons désormais d'une solution pour le potentiel du vent sur le domaine Ω_1 . De plus, comme nous l'avons vu en 2.1.3, nous connaissons une application conforme qui envoie Ω_1 sur l'extérieur du disque unité (domaine noté Ω_2). Il s'agit de l'inverse de l'application de Joukowski. Nous allons alors considérer F_1 la version complexifiée du potentiel ψ_1 , définie par :

$$\forall z \in \Omega_1, F_1(z) = U \cdot \Re(z) \quad \text{où } \Re(z) \text{ désigne la partie réelle de } z.$$

D'après la section 2.2.3, nous pouvons déduire une solution F_2 pour le potentiel du vent sur le domaine Ω_2 par : $\forall \omega \in \Omega_2, F_2(\omega) = F_1(J(\omega))$.

$$\text{Alors, pour } \omega = x + iy, \text{ on a } F_2(x + iy) = U \cdot \text{Re}\left(x + iy + \frac{1}{x + iy}\right) = U \cdot x \left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

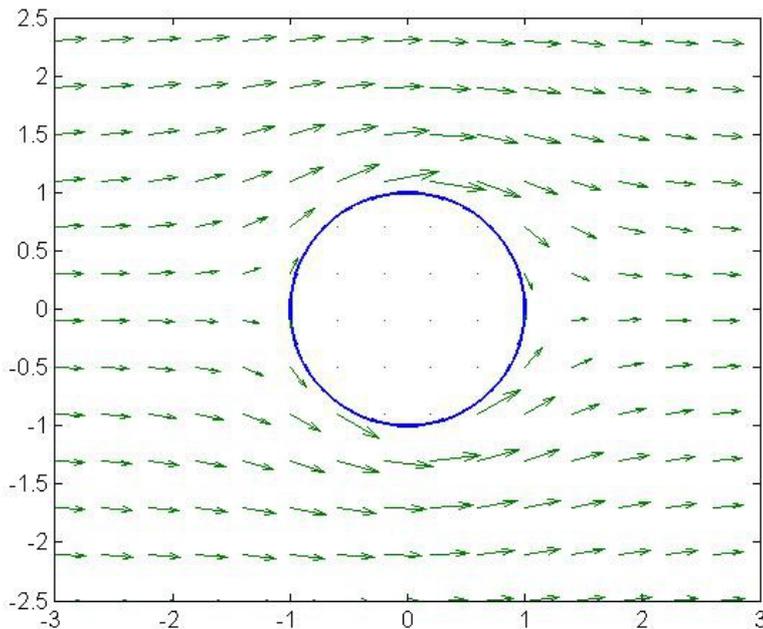
On associe à F_2 sa version réelle ψ_2 , définie par : $\psi_2(x, y) = F_2(x + iy)$

On détermine alors le vent \vec{u}_2 sur l'extérieur du disque unité par :

$$\forall (x, y) \in \Omega_2, \quad \vec{u}_2(x, y) = \text{grad}(\psi_2)^T(x, y)$$

Ainsi,
$$\forall (x, y) \in \Omega_2, \quad \vec{u}_2(x, y) = \left(U \left(1 + \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} \right), \frac{-2xy}{x^2 + y^2} \cdot U \right)^T$$

Voici la représentation du champ de vecteurs obtenu :

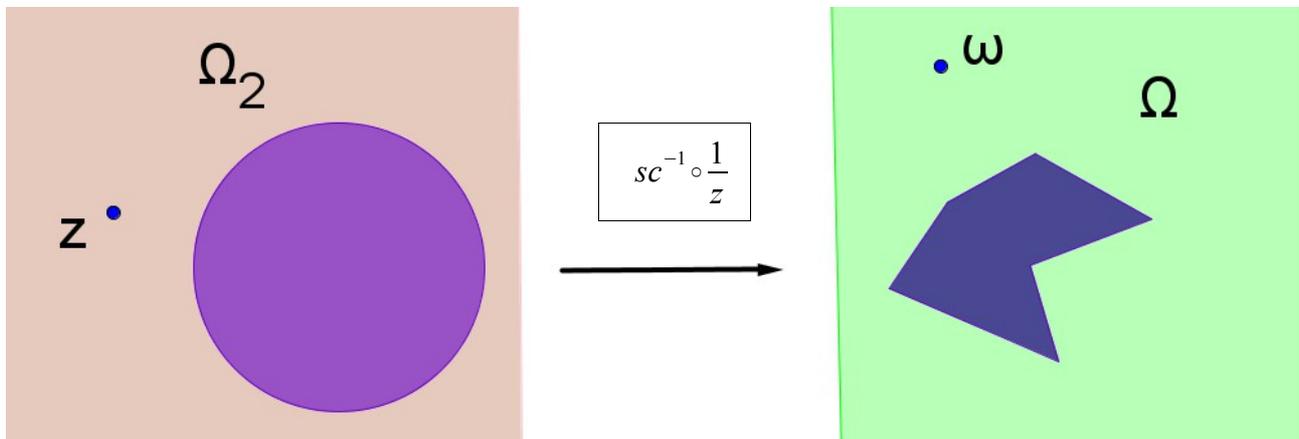


2.2.6 Vent autour d'un polygone

Connaissant désormais le vent et son potentiel autour du disque unité, nous cherchons à le déterminer sur notre domaine d'étude Ω . Pour cela, nous utilisons l'inverse de l'application de Schwarz-Christoffel présentée en 2.1.4. composée avec une inversion.

Ainsi, deux éléments quelconques $z \in \Omega_2$ et $\omega \in \Omega$ sont en bijection par la relation :

$$\omega = sc^{-1}\left(\frac{1}{z}\right) \text{ où } sc \text{ désigne l'application de Schwarz-Christoffel.}$$



On note F le potentiel du vent sur le domaine Ω en version complexifiée.
Alors on a la relation :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad F(\omega) = F_2(h^{-1}(\omega)) \quad \text{avec} \quad h(z) = sc^{-1} \circ \frac{1}{z}$$

et pour rappel : $F_2(z) = U \cdot \Re\left(z + \frac{1}{z}\right)$

On a : $h^{-1}(\omega) = \frac{1}{sc(\omega)}$ ainsi, $F(\omega) = U \cdot \Re\left(sc(\omega) + \frac{1}{sc(\omega)}\right) = U \cdot \Re(\Phi(\omega))$

Notons alors ψ la version réelle du potentiel F : $\psi(x, y) = F(x + iy)$.

On cherche à déterminer le vent $\vec{u}_\Omega = \text{grad}(\psi)^T$.

Alors : $\vec{u}_\Omega(x, y) = U \cdot \text{grad}(\Re(A(x, y) + iB(x, y)))^T = U \cdot \text{grad}(A)(x, y)$

en posant : $A(x, y) = \Re(\Phi(x + iy))$ et $B(x, y) = \Im(\Phi(x + iy))$

On peut alors noter le vent complexifié comme : $V(x + iy) = U \cdot (A_x(x, y) + iA_y(x, y))$

La fonction A étant holomorphe, on peut utiliser les équations de Cauchy Riemann:

$$A_x + iA_y = A_x - iB_x = \overline{A_x + iB_x} = \overline{\Phi'}$$

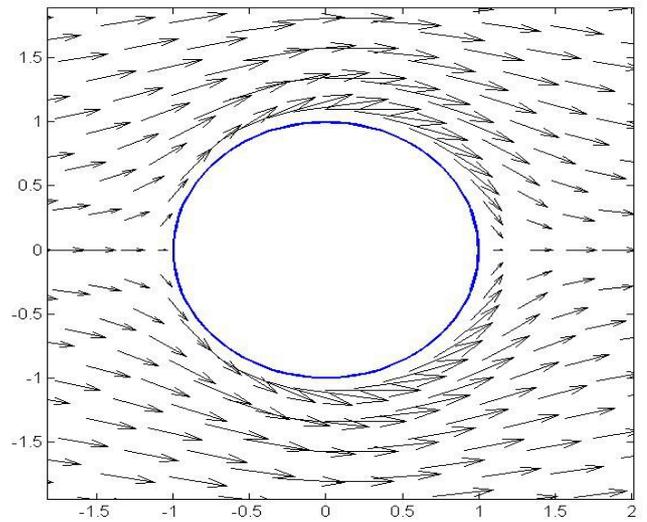
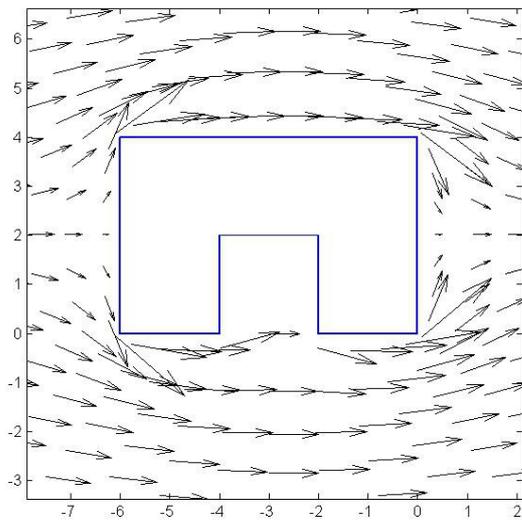
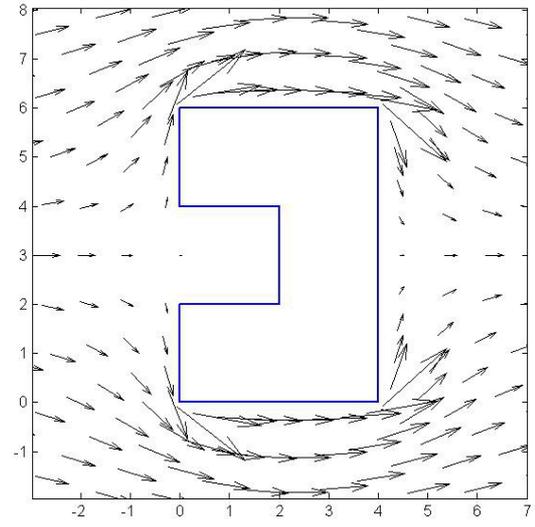
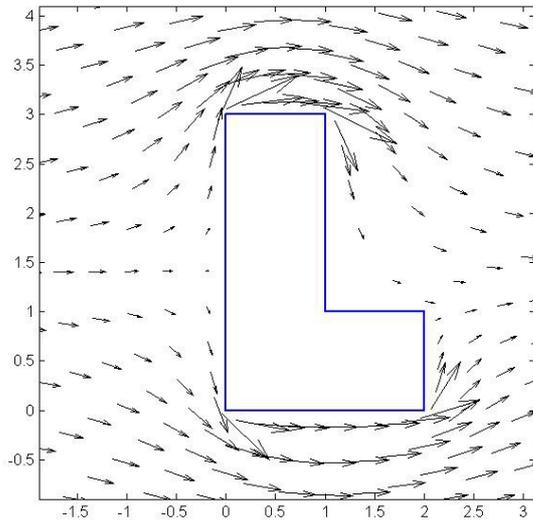
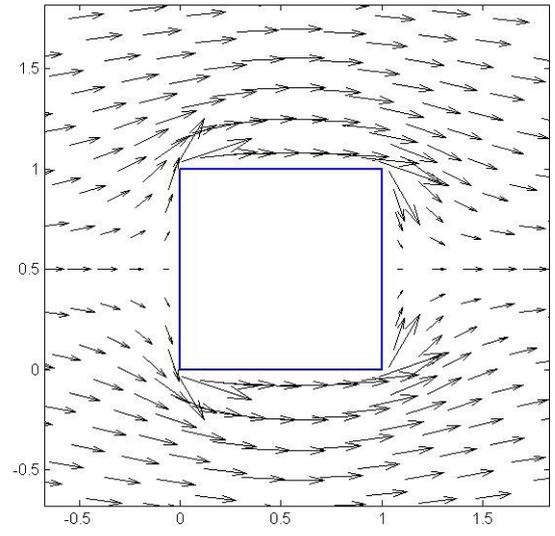
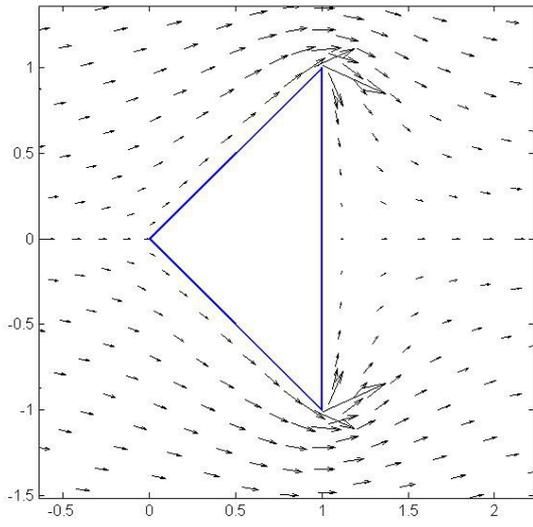
On a alors : $V(x + iy) = U \cdot (\overline{\Phi'(x + iy)})$ avec $\Phi'(\omega) = sc'(\omega) \left(1 - \frac{1}{sc^2(\omega)}\right)$ (#)

Finalement, on utilise la relation suivante : $\vec{u}_\Omega(x, y) = (\Re(V(x + iy)), \Im(V(x + iy)))$

Remarque :

En pratique, lorsqu'on utilise le package de Tobin A. Driscoll, l'application de Schwarz-Christoffel qui est générée ne conserve pas forcément l'orientation du vent dans les zones éloignées de la horde. Au vu de la formule (#), et sachant que le vent dans les zones éloignées de la horde est de la forme $(U, 0)$ avec $U > 0$, il faudra déterminer la rotation qui permet d'obtenir la condition suivante : $\|X\| = +\infty$ implique $f'(X) > 0$.

Voici quelques représentations du vent obtenu autour de différents types de polygones.



La dernière image correspond à un polygone ayant 100 sommets situés sur le cercle unité. Cette configuration nous permet de montrer la cohérence de la méthode en comparant le résultat obtenu à celui de la partie 2.2.5 .

Ces exemples permettent de mettre en évidence quelques phénomènes :

- * Le vent est nul pour les points situés dans les zones concaves de Ω (voir figures 4 et 5).
- * Lorsque le vent fait face à un mur qui est perpendiculaire à sa direction d'origine, la direction des flèches se modifie assez rapidement en amont de l'obstacle.
- * Au niveau de certaines irrégularités de la frontière, le vent est beaucoup plus fort. Il s'agit des sommets du polygone pour lesquels le vent n'as pas beaucoup dévié en amont. En effet, pour le sommet de gauche du triangle, le vent arrive avec une intensité très faible car il a été dévié en amont vers les deux autres sommets. Par conséquent, l'intensité du vent au niveau de ces deux autres sommets devient très grande.